

N° D'ORDRE

1347.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

PAR M. MAURICE PASCHOUD,

Ingénieur, licencié ès sciences mathématiques.

1^{re} THÈSE. — SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ A
L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE D'UNE PLAQUE
CARRÉE MINCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1914 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, *Examineurs.*
PICARD,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554605_0048

N° D'ORDRE

1347.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

PAR M. MAURICE PASCHOUD,

Ingénieur, licencié ès sciences mathématiques.

1^{re} THÈSE. — SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ A
L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE D'UNE PLAQUE
CARRÉE MINCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.



Soutenues le juin 1914 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL, *Président.*

BOUSSINESQ, }
PICARD, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires ...	{ CH. WOLF. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
Professeurs	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	EMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD.....	Mathématiques générales.
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Histologie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
Professeurs adjoints	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

PREMIÈRE THÈSE.

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE WALTHER RITZ

A L'ÉTUDE DE

L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE D'UNE PLAQUE CARRÉE MINCE.

INTRODUCTION.

I. Soit $(x, y, 0)$ un point du feuillet moyen d'une plaque élastique plane. L'équation *indéfinie* qui donne le petit déplacement transversal w de ce point, quand la plaque, supposée mince, est soumise à une pression donnée, s'écrit

$$(1) \quad \Delta_2 \Delta_2 w \equiv \frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = f(x, y).$$

$f(x, y)$ est, à un facteur constant près, dépendant de l'élasticité et de l'épaisseur de la plaque, la pression par unité d'aire.

Supposons la plaque rectangulaire et prenons pour axes de coordonnées deux de ses côtés. Suivant que le bord de la plaque est libre, appuyé ou encastré, le déplacement w , sur ce bord, satisfait à des conditions *définies* qui sont, pour des *côtés parallèles à l'axe des x* :

Côté libre,

$$\mu \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} = 0, \quad \frac{d}{dy} \left[(2 - \mu) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} \right] = 0;$$

P.

1

Côté *appuyé*,

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} = 0;$$

Côté *encasté*,

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{dy} = 0.$$

II. Dans un Mémoire inédit, Navier a intégré l'équation (1) pour le cas de la « plaque rectangulaire horizontale *appuyée* supportant, outre son poids propre, une charge verticale pouvant varier d'un point à un autre de sa surface ».

La solution de Navier a été exposée par Barré de Saint-Venant dans la traduction de la *Théorie de l'élasticité*, de Clebsch, p. 740.

Supposons la plaque carrée et de côté égal à un. Prenant pour axes deux côtés de la plaque, Navier suppose un développement en série *double* de la forme

$$(2) \quad w = \Sigma \Sigma A_{mn} \sin m \pi x \sin n \pi y,$$

qui satisfait aux conditions au contour. Il écrit que la fonction w représentée par (2) satisfait à l'équation (1) et détermine les coefficients A_{mn} par la méthode de Fourier.

III. Plus tard, Maurice Levy (*C. R. Acad. Sc*, t. CXXIX, 1899, p. 535), par une méthode plus générale que celle de Navier, a résolu le problème de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire, *lorsque deux bords opposés de celle-ci, au moins, sont appuyés*.

Prenons les bords appuyés opposés parallèles à l'axe des y . Maurice Levy représente w par la série *simple*

$$(3) \quad w = \sum_i Y_i \sin i \pi x,$$

où Y_i est fonction de y seul.

Chaque terme de (3) satisfait aux conditions sur les bords appuyés. Portant cette expression de w dans (1), il vient, après multiplication

par $\sin i\pi x dx$ et intégration de 0 à 1,

$$(4) \quad Y_i'' - 2i^2\pi^2 Y_i'' + i^4\pi^4 Y_i = 2 \int_0^1 f(x, y) \sin i\pi x dx.$$

Si $\varphi_i(y)$ est une intégrale particulière de (4), son intégrale générale sera

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} i\pi y + B_i \operatorname{ch} i\pi y + y(C_i \operatorname{sh} i\pi y + D_i \operatorname{ch} i\pi y).$$

Les conditions sur les bords parallèles à l'axe des x déterminent les quatre constantes A_i, B_i, C_i, D_i .

M. Estanave (Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1900) a appliqué la méthode de Maurice Levy aux six cas particuliers qu'elle permet d'intégrer.

IV. En 1908 enfin, Walther Ritz a imaginé une méthode générale de résolution des problèmes de la Physique mathématique (OEuvres publiées par la Société suisse de Physique, Paris, Gauthier-Villars, 1911). Comme première application de cette méthode, il a donné une solution du problème de l'équilibre de la plaque carrée *encastree*, chargée uniformément.

Voici les principes essentiels de sa méthode :

1° Au lieu de partir des équations différentielles du problème et des conditions au contour, Ritz considère ces équations comme les conditions *nécessaires* pour rendre minimum une certaine intégrale $\mathfrak{J}$.

2° La solution qu'il s'agit de représenter est supposée développée en série infinie de polynomes, en série de Fourier, etc., les fonctions suivant lesquelles on développe devant, en général, vérifier les conditions auxquelles la variation de l'intégrale $\mathfrak{J}$ est soumise.

3° Le problème une fois posé comme problème de variation et la suite de fonctions suivant lesquelles on développe étant choisie, Ritz représente la solution cherchée par une série *limitée* de ces fonctions, chacun des termes de cette série étant affecté d'un coefficient arbitraire. En portant cette série, limitée au terme de rang m , dans l'intégrale $\mathfrak{J}$, celle-ci devient une fonction connue $\mathfrak{J}_m$ des coefficients arbitraires. Ritz détermine alors ces coefficients de façon à rendre extremum

cette fonction s_m . Il obtient ainsi une approximation de la solution cherchée, approximation qui s'améliore, en général, quand m augmente.

Outre le problème de la plaque encastree, Ritz a traité par cette méthode le problème du mouvement vibratoire d'une plaque carrée à bords libres et le problème de Dirichlet.

Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, t. III, p. 27); M. Love (Congrès des mathématiciens, Cambridge, 1912) et M. Blondel (Thèse, 1912) ont appliqué la méthode de Ritz à certains problèmes de la théorie des marées. Enfin, M. Th. von Karman (*Bulletin de la Société des Ingénieurs allemands*, 1911), Th. Pöschl, K. Federhofer (*Comptes rendus de l'Académie de Vienne*, 1912) ont utilisé la même méthode pour résoudre divers problèmes techniques.

C'est sur le conseil et les indications bienveillantes de M. Boussinesq que j'ai entrepris le présent travail. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE I.

FORMULES PRÉLIMINAIRES TIRÉES DE LA THÉORIE DES TIGES ÉLASTIQUES (1).

1. Avant d'exposer la solution de Ritz, nous allons établir diverses relations de la théorie des tiges élastiques, relations que nous aurons à utiliser dans la suite de ce travail.

Soit une tige élastique de longueur un. Appelons $u(x)$ le déplacement transversal d'un point x de cette tige. Ce déplacement satisfait à l'équation *indéfinie*

$$(5) \quad \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = K^4 u(x).$$

(1) Les tiges élastiques sont étudiées avec beaucoup de détails par Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, chap. VIII.

Selon que la tige est libre, appuyée ou encastrée à une extrémité, on a à cette extrémité les conditions *définies* :

Bout *libre*,

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} = 0;$$

Bout *appuyé*,

$$\bar{u} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = 0;$$

Bout *encastré*,

$$\bar{u} = 0, \quad \frac{d\bar{u}}{dx} = 0.$$

2. Soient u_m et u_n des intégrales particulières de (5) correspondant à deux valeurs *différentes* K_m et K_n du paramètre K . On a les deux équations

$$\frac{d^4 u_m}{dx^4} = K_m^4 u_m, \quad \frac{d^4 u_n}{dx^4} = K_n^4 u_n.$$

Multiplions la première par $-u_n$, la seconde par u_m et ajoutons membre à membre; il vient, en intégrant de 0 à 1,

$$\begin{aligned} (6) \quad & (K_n^4 - K_m^4) \int_0^1 u_m u_n dx \\ &= \int_0^1 \left(u_m \frac{d^4 u_n}{dx^4} - u_n \frac{d^4 u_m}{dx^4} \right) dx \\ &= \left[u_m \frac{d^3 u_n}{dx^3} - u_n \frac{d^3 u_m}{dx^3} + \frac{du_n}{dx} \frac{d^2 u_m}{dx^2} - \frac{du_m}{dx} \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{d^2 u_m}{dx^2} \frac{d^2 u_n}{dx^2} dx - \int_0^1 \frac{d^2 u_n}{dx^2} \frac{d^2 u_m}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, les termes intégrés s'annulent et l'on a

$$\int_0^1 u_m u_n dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Les fonctions u_m forment un système *orthogonal*.

Il en est de même de leurs dérivées secondes, car

$$\int_0^1 u_m'' u_n'' dx = (u_m'' u_n' - u_m' u_n'')_0^1 + K_m^4 \int_0^1 u_m u_n dx = 0 \quad (m \neq n).$$

3. La relation (6) ne donne rien quand $m = n$. On peut cependant s'en servir pour calculer $\int_0^1 u_m^2 dx$. On pose $K_n = K_m + \delta K_m$. Il suffit de chercher la limite des deux membres de (6) quand, après division par δK_m on fait tendre δK_m vers zéro. Toutes réductions faites, il vient

$$(7) \quad \int_0^1 u_m^2 dx = \frac{1}{4} [u_m^2 - 2 u_m^{(')} u_m^{(m)} + u_m^{(m)2}]_{x=1}.$$

Les accents entre parenthèses désignent des dérivées par rapport à Kx .

Si la tige est *libre* au bout $x = 1$,

$$\int_0^1 u_m^2 dx = \frac{1}{4} u_m^2(1);$$

Si elle est *appuyée* en ce point,

$$\int_0^1 u_m^2 dx = -\frac{1}{2} u_m^{(')} (1) u_m^{(m)} (1);$$

Si enfin elle est *encastrée*,

$$\int_0^1 u_m^2 dx = \frac{1}{4} u_m^{(m)2} (1).$$

Ces trois relations sont indépendantes des conditions à l'autre bout $x = 0$; on aura donc pour $4 \int_0^1 u_m^2 dx$:

Tige *libre-libre*,

$$u_m^2 \quad (\text{à l'un quelconque des bouts});$$

libre-appuyée,

$$u_m^2 (\text{bout libre}) = -2 u_m^{(')} u_m^{(m)} (\text{bout appuyé});$$

libre-encastrée,

$$u_m^2 (\text{bout libre}) = u_m^{(m)2} (\text{bout encastré});$$

appuyée-encastrée,

$$-2 u_m^{(')} u_m^{(m)} (\text{bout appuyé}) = u_m^{(m)2} (\text{bout encastré});$$

appuyée-appuyée,

$$- 2 u_m' u_m^{(m)} \text{ (à l'un des bouts);}$$

encastrée-encastrée,

$$u_m^{(m)2} \text{ (à l'un des bouts).}$$

Remplaçons, dans la relation qui donne (7), successivement u par u' , u'' , u''' , il vient

$$(8) \quad 4 K_m \int_0^1 u_m^{(l)2} dx = [3 u_m u_m^{(l)} + K_m x u_m^{(l)2} - u_m^{(m)} u_m^{(l)} + K_m x u_m^{(m)2}]_0^1,$$

$$(9) \quad 4 K_m \int_0^1 u_m^{(n)2} dx = K_m [u_m^{(n)2} - 2 u_m^{(m)} u_m^{(n)} + u_m^2]_{x=1},$$

$$(10) \quad 4 K \int_0^1 u_m^{(m)2} dx = [3 u_m^{(m)} u_m^{(m)} + K_m x u_m^{(m)2} - u_m u_m^{(l)} + K_m x u_m^{(l)2}]_0^1.$$

On voit que

$$\int_0^1 u_m^{(n)2} dx = \int_0^1 u_m^2 dx,$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^1 u_m^{(n)2} dx = K_m^4 \int_0^1 u_m^2 dx.$$

4. Nous prendrons l'intégrale générale de l'équation (5) sous la forme symétrique

$$u = A(\cos Kx + \operatorname{ch} Kx) + B(\cos Kx - \operatorname{ch} Kx) \\ + C(\sin Kx + \operatorname{sh} Kx) + D(\sin Kx - \operatorname{sh} Kx).$$

5. TIGE LIBRE A SES DEUX EXTRÉMITÉS. — Les conditions aux extrémités donnent $B = 0$, $D = 0$, et deux relations dont la compatibilité exige que

$$(11) \quad \cos K \operatorname{ch} K = 1.$$

On voit sans peine que les racines de (11) sont de la forme

$$K_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - (-1)^n \beta_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

avec β_n petit et positif et l'on trouve, par approximations successives,

$$\beta_n = \frac{2}{a} + (-1)^n \frac{4}{a^2} + \frac{34}{3a^3} + (-1)^n \frac{112}{3a^4} + \dots \quad \text{si} \quad a = e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Voici les valeurs des six premières racines, calculées par lord Rayleigh

$$K = 0, \quad K = 4,7300, \quad K = 7,8532, \quad K = 10,9956,$$

$$K = \frac{9\pi}{2} = 14,1372, \quad K = \frac{11\pi}{2} = 17,2788.$$

On a

$$\int_0^1 u_m^2 dx = (\sin K_m - \text{sh } K_m)^2 = (\sin K_m \text{ ch } K_m - \cos K_m \text{ sh } K_m)^2.$$

Si nous prenons donc

$$(12) \quad u_m = (\sin K_m x + \text{sh } K_m x) \alpha_m - (\cos K_m x + \text{ch } K_m x),$$

avec

$$\alpha_m = \frac{\cos K_m - \text{ch } K_m}{\sin K_m - \text{sh } K_m},$$

il viendra

$$\int_0^1 u_m^2 dx = 1,$$

les fonctions u_m seront *normales*.

Remarque. — A la racine $K = 0$ correspondent les deux fonctions $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right)$, qui ne sont pas de la forme (12), mais qui satisfont à toutes les conditions imposées aux $u_m(x)$. (Voir, au sujet de ces fonctions, RITZ, *OEuvres*, p. 281, et LORD RAYLEIGH, *On the calculation of Chladni's Figures for a Square Plate* (*Phil. Mag.*, t. XXII, 1911.)

La relation (8) donne

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 u_m^2 dx &= 3 u_m(1) u'_m(1) - 3 u_m(0) u'_m(0) + u_m^2(1), \\ u_m(0) &= -2, \quad u'_m(0) = 2 K_m x_m, \\ u_m(1) &= \frac{-2(\sin K_m \text{ch } K_m - \cos K_m \text{sh } K_m)}{\sin K_m - \text{sh } K_m}, \quad u'_m(1) = -K_m \frac{2 \sin K_m \text{sh } K_m}{\sin K_m - \text{sh } K_m}. \end{aligned}$$

Mais,

$$(\sin K_m \operatorname{ch} K_m - \cos K_m \operatorname{sh} K_m) = (-1)^{m+1} (\sin K_m - \operatorname{sh} K_m)$$

et

$$\sin K_m \operatorname{sh} K_m = (-1)^{m+1} (\cos K_m - \operatorname{ch} K_m),$$

par suite

$$u_m(1) = 2(-1)^m, \quad u'_m(1) = 2K_m(-1)^m \alpha_m$$

et

$$\int_0^1 u_m'^2 dx = 6\alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2 \quad (m > 2).$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^1 u_m''^2 dx = K_m^4 (-2\alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2) \quad (m > 2).$$

Posons

$$\sigma_{nm} = \int_0^1 u_n u_m'' dx, \quad \sigma_{mn} = \int_0^1 u_m u_n'' dx.$$

On trouve, en intégrant par parties, pour m et $n > 2$,

$$K_n^4 \sigma_{nm} = K_m^4 \sigma_{mn}.$$

Mais on a aussi

$$\sigma_{nm} = (u_n u_m')_0^1 - \int_0^1 u_m' u_n' dx, \quad \sigma_{mn} = \frac{K_n^4}{K_m^4} \sigma_{nm} = (u_m u_n')_0^1 - \int_0^1 u_n' u_m' dx$$

et il vient finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} &= \begin{cases} 0 & (m \text{ et } n \text{ de parité différente}), \\ \frac{8K_m^4(K_m \alpha_m - K_n \alpha_n)}{K_m^4 - K_n^4} & (m \text{ et } n \text{ de même parité}); \end{cases} \\ \sigma_{mm} &= \int_0^1 u_m u_m'' dx = (u_m u_m')_0^1 - \int_0^1 u_m'^2 dx = 2\alpha_m K_m - \alpha_m^2 K_m^2 \quad (m > 2), \\ \int_0^1 u_m' u_n' dx &= (u_n' u_m)_0^1 - \sigma_{mn} \\ &= \begin{cases} 0 & (m \text{ et } n \text{ de parité différente}), \\ 8 \frac{K_m^4 K_n \alpha_n - K_n^4 K_m \alpha_m}{K_m^4 - K_n^4} & (m \text{ et } n \text{ de même parité}) \end{cases} \\ &\quad (m > 2, n \geq 2). \end{aligned}$$

P.

2

Enfin

$$\int_0^1 u_m dx = 0 \quad (m > 2),$$

car $u(x) = 1$ est une des fonctions du système orthogonal.

6. TIGE ENCASTRÉE AUX DEUX BOUTS. — Soit $u(x)$ une solution de (5) satisfaisant aux conditions

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 \bar{u}}{dx^3} = 0,$$

aux deux bouts de la tige. La dérivée seconde de $u(x)$ satisfait aux conditions

$$\bar{u}'' = 0, \quad \frac{d\bar{u}''}{dx} = 0.$$

On voit ainsi que la dérivée seconde de la solution trouvée pour une tige *libre* sera la solution relative à une tige *encastree*. Nous prendrons alors, en négligeant le facteur K_m^2 ,

$$(13) \quad u_m = (\cos K_m x - \operatorname{ch} K_m x) - (\sin K_m x - \operatorname{sh} K_m x) \alpha_m.$$

Toutes les relations du paragraphe précédent nous donneront ici des relations correspondantes. Il suffit, pour les obtenir, de remplacer respectivement

$$u_m, \quad u'_m, \quad u''_m, \quad u'''_m, \quad u^{IV}_m,$$

par

$$\frac{u''_m}{K_m^2}, \quad \frac{u'''_m}{K_m^2}, \quad K_m^2 u_m, \quad K_m^2 u'_m, \quad K_m^2 u''_m.$$

Il vient ainsi successivement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_m''^2 dx &= K_m^4, & \int_0^1 u_m^2 dx &= 1, \\ \int_0^1 u_m'^2 dx &= -2 \alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2, \\ \int_0^1 u_m'''^2 dx &= K_m^4 (6 \alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{I}_{nm} = \mathcal{I}_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \text{ et } n \text{ de parité différente}), \\ \frac{8 \mathbf{K}_m^2 \mathbf{K}_n^2}{\mathbf{K}_m^4 - \mathbf{K}_n^4} (\mathbf{K}_m \alpha_m - \mathbf{K}_n \alpha_n) & (m \text{ et } n \text{ de même parité}); \\ \mathcal{I}_{mm} = 2 \alpha_m \mathbf{K}_m - \mathcal{I}_m^2 \mathbf{K}_m^2, & \int_0^1 u'_m dx = 0. \end{cases}$$

7. TIGE APPUYÉE A SES DEUX EXTRÉMITÉS. — Il vient

$$\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}, \quad \sin \mathbf{K} = 0,$$

donc

$$\mathbf{K} = n\pi \quad \text{et} \quad u_m(x) = \sin m\pi x.$$

$$\int_0^1 u_m u_n dx = 0, \quad \int_0^1 u_m^2 dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \sin m\pi x dx = \frac{2}{m\pi} \quad (m \text{ impair}).$$

8. TIGE LIBRE A UNE EXTRÉMITÉ, APPUYÉE A L'AUTRE. — Supposons la tige libre en $x = 0$ et appuyée en $x = 1$. On trouve $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ et deux conditions d'où résulte

$$\text{tang} \mathbf{K} = \text{th} \mathbf{K}.$$

Les premières racines de cette équation sont :

$$\mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{K} = 3,9266, \quad \mathbf{K} = \left(2 + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad \mathbf{K} = \left(3 + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad \dots$$

La relation (7) devient

$$\int_0^1 u_m^2 dx = (\sin \mathbf{K}_m - \text{sh} \mathbf{K}_m)^2 = 2 \sin \mathbf{K}_m \text{sh} \mathbf{K}_m (\cos \mathbf{K}_m \text{ch} \mathbf{K}_m - 1).$$

En prenant

$$(14) \quad u_m(x) = (\sin \mathbf{K}_m x + \text{sh} \mathbf{K}_m x) \alpha_m - (\cos \mathbf{K}_m x + \text{ch} \mathbf{K}_m x),$$

nous aurons

$$\int_0^1 u_m^2 dx = 1.$$

Remarque. — La fonction $u_1(x) = \sqrt{3}(x - 1)$ qui correspond à $\mathbf{K} = 0$ remplit toutes les conditions imposées aux u_m .

Supposons $m > 1$, (8) donne ici :

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 u_m'^2 dx &= -3 u_m(0) u_m'(0) + u_m'^2(1) + \frac{u_m''^2(1)}{K_m^4}; \\ u_m(0) &= -2, \quad u_m'(0) = 2 \alpha_m K_m, \\ u_m'(1) &= \frac{-2 \sin K_m \operatorname{sh} K_m}{\sin K_m - \operatorname{sh} K_m} K_m, \quad u_m''(1) = \frac{2(\cos K_m \operatorname{ch} K_m - 1)}{\sin K_m - \operatorname{sh} K_m} K_m^3, \\ u_m'^2(1) + \frac{u_m''^2(1)}{K_m^4} &= 4 \alpha_m^2 K_m^2, \end{aligned}$$

finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_m'^2 dx &= 3 \alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2; \\ \tau_{nm} &= \frac{K_m^4}{K_n^4} \tau_{mn} = \frac{4 K_m^4 (K_m \alpha_m - K_n \alpha_n)}{K_m^4 - K_n^4}, \\ \tau_{mm} &= \alpha_m K_m - \alpha_m^2 K_m^2; \\ \int_0^1 u_n' u_m' dx &= \frac{4 (K_m^4 K_n \alpha_n - K_n^4 K_m \alpha_m)}{K_m^4 - K_n^4}. \end{aligned}$$

9. TIGE ENCASTRÉE A UN BOUT ET APPUYÉE A L'AUTRE. — Si la tige est encastrée à l'extrémité $x = 0$ et appuyée au point $x = 1$, il vient $A = 0$, $C = 0$ et K doit être racine de $\operatorname{tang} K = \operatorname{th} K$.

$$\int_0^1 u_m^2 dx = (\sin K_m - \operatorname{sh} K_m)^2 = 2 \sin K_m \operatorname{sh} K_m (\cos K_m \operatorname{ch} K_m - 1).$$

Nous prendrons

$$(15) \quad u_m(x) = (\cos K_m x - \operatorname{ch} K_m x) - (\sin K_m x - \operatorname{sh} K_m x) \alpha_m,$$

alors

$$\int_0^1 u_m^2 dx = 1.$$

On trouve, comme précédemment,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_m'^2 dx &= -\alpha_m K_m + \alpha_m^2 K_m^2, \\ \tau_{nm} = \tau_{mn} &= \frac{4 K_m^2 K_n^2 (K_m \alpha_m - K_n \alpha_n)}{K_m^4 - K_n^4}, \\ \tau_{mm} &= \alpha_m K_m - \alpha_m^2 K_m^2, \\ \int_0^1 u_n' u_m' dx &= \frac{-4 K_m^2 K_n^2 (K_m \alpha_m - K_n \alpha_n)}{K_m^4 - K_n^4}. \end{aligned}$$

10. TIGE ENCASTRÉE A UN BOUT ET LIBRE A L'AUTRE. — Supposons la tige encastrée au point $x = 0$ et libre à l'autre extrémité. On a

$$A = 0, \quad C = 0 \quad \text{et} \quad \cos K \operatorname{ch} K = -1,$$

dont les premières racines calculées, comme celles de (11), par Lord Rayleigh sont :

$$K = 1,8751; \quad K = 4,6941; \quad K = 10,9955;$$

$$K = \frac{9\pi}{2} = 14,1372; \quad K = \frac{11\pi}{2} = 17,2788.$$

$$\int_0^1 u_m^2 dx = (\sin K_m + \operatorname{sh} K_m)^2 = (\cos K_m \operatorname{sh} K_m - \sin K_m \operatorname{ch} K_m)^2.$$

Pour avoir $\int_0^1 u_m^2 dx = 1$, nous prendrons

$$(16) \quad u_m(x) = (\cos K_m x - \operatorname{ch} K_m x) - (\sin K_m x - \operatorname{sh} K_m x) \beta_m,$$

où

$$\beta_m = \frac{\cos K_m + \operatorname{ch} K_m}{\sin K_m + \operatorname{sh} K_m};$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_m'^2 dx &= 2\beta_m K_m + \beta_m^2 K_m^2, \\ \tau_{nm} &= \begin{cases} \frac{4(K_m \beta_m - K_n \beta_n) K_m^2}{K_m^2 - K_n^2} & (m \text{ et } n \text{ de même parité}), \\ \frac{4(K_m \beta_m - K_n \beta_n) K_m^2}{-(K_m^2 + K_n^2)} & (m \text{ et } n \text{ de parité différente}), \end{cases} \\ \tau_{mm} &= 2\beta_m K_m - \beta_m^2 K_m^2, \\ \int_0^1 u_m' u_n' dx &= \begin{cases} \frac{4K_m K_n (K_m \beta_n - K_n \beta_m)}{K_m^2 - K_n^2} & (m \text{ et } n \text{ de même parité}), \\ \frac{4K_m K_n (K_m \beta_n + K_n \beta_m)}{-(K_m^2 + K_n^2)} & (m \text{ et } n \text{ de parité différente}). \end{cases} \end{aligned}$$

11. Dans sa *Theory of Sound* (t. I, p. 281), Lord Rayleigh, pour éviter l'emploi de Tables de fonctions hyperboliques, donne des expressions des fonctions $u_m(x)$ qui permettent d'en calculer les valeurs numériques en se servant de Tables de logarithmes seulement. Nous avons utilisé, pour les calculs numériques, les Tables de Houël (Paris, Gauthier-Villars, 1901) et Burrau (Berlin, Reimer, 1907).

On pourrait procéder autrement et chercher des approximations par des polynomes, pour les fonctions u_m . La méthode de Ritz convient bien à ce genre de calculs, comme le montre l'exemple suivant que nous donnons comme application de la méthode de Ritz aux équations différentielles.

Soit une tige élastique de longueur *deux*, *encastée* aux deux bouts. Le déplacement $u(x)$ satisfait à l'équation (5) avec les deux conditions

$$\bar{u} = 0, \quad \frac{d\bar{u}}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = \pm 1.$$

L'expression de $u_m(x)$, si l'on se borne aux solutions *paires en x*, est

$$u_m(x) = \frac{-\operatorname{ch} K_m \cos K_m x + \cos K_m \operatorname{ch} K_m x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 K_m + \cos^2 K_m}},$$

K_m étant racine de

$$(17) \quad \operatorname{tang} K_m + \operatorname{th} K_m = 0.$$

Les racines de (17) sont successivement

$$K_2 = 2,3650; \quad K_4 = \left(2 - \frac{1}{4}\right)\pi, \quad K_6 = \left(3 - \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Cherchons, par la méthode de Ritz, une approximation des u_m au moyen de polynomes.

Le problème revient à la recherche de l'extrémum de l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int_{-1}^{+1} (y''^2 - K^4 y^2) dx,$$

dont la variation première est

$$\delta \mathfrak{J} = 2 \int_{-1}^{+1} (y'' - K^2 y) \delta y dx$$

Le polynome le plus général satisfaisant aux conditions données est

$$y_n = (1 - x^2)^2 (a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^{2n}).$$

Remplaçons y par y_n dans $\mathfrak{J}$, il vient

$$\mathfrak{J}_n = \int_{-1}^{+1} (y_n''^2 - K_n^4 y_n^2) dx.$$

Les conditions de minimum donnent, si l'on fait $K_n^4 = M_n$,

$$\int_{-1}^{+1} (y_n'' - M_n y_n) \frac{dy_n}{da_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Cherchons une première approximation en prenant

$$y_1 = (1 - x^2)^2 (a_0 + a_1 x^2);$$

il vient deux équations qui, tous calculs faits, s'écrivent

$$\begin{aligned} a_0(693 - 22M_1) + a_1(-99 - 2M_1) &= 0, \\ a_0(1287 - 26M_1) + a_1(3861 - 6M_1) &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$M'_1 = 31,29 \quad \text{et} \quad M''_1 = 1018,125,$$

d'où

$$K_2 = 2,3651 \quad \text{au lieu de} \quad 2,3650$$

et

$$K_4 = 5,6487 \quad \text{au lieu de} \quad 5,4978.$$

L'approximation de K_2 est très bonne.

$$y_1(x) = (1 - x^2)^2 (1 - 0,127x^2)$$

qui, pour $x = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}$, prend les valeurs 1,00; 0,868; 0,541; 0,176 au lieu des valeurs exactes 1,00; 0,871; 0,545; 0,181.

De telles approximations dispenseraient de l'emploi de Tables de fonctions hyperboliques.

CHAPITRE II.

SOLUTION DE RITZ POUR LE PROBLÈME DE LA PLAQUE CARRÉE ENCASTRÉE.

12. Pour simplifier, nous supposons la charge uniforme égale à l'unité par unité d'aire et le côté de la plaque égal à un. Il faut intégrer l'équation (1) où $f(x, y) = 1$ avec les conditions au contour $\bar{\omega} = 0$, $\frac{d\bar{\omega}}{du} = 0$. La fonction ω doit être finie et continue ainsi que ses dérivées des quatre premiers ordres, dans l'intérieur P de la plaque et sur son contour C.

Ritz fait d'abord un certain nombre de remarques.

13. 1° La solution cherchée ω rend extrémum l'intégrale

$$(18) \quad \mathfrak{J} = \int_P \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 \omega)^2 - \omega \right] dx dy.$$

Pour le voir, appliquons à la variation première de $\mathfrak{J}$ la formule de Mathieu :

$$(19) \quad \int_P \Delta_2 U \Delta_2 V dx dy = \int_P V \Delta_2 \Delta_2 U dx dy + \int_C \left(\Delta_2 U \frac{dV}{dn} - V \frac{d\Delta_2 U}{dn} \right) ds.$$

Si l'on fait $U = \omega$, $V = \delta\omega$, il vient

$$\delta I = \int_P (\Delta_2 \Delta_2 \omega - 1) \delta\omega dx dy,$$

car l'intégrale curviligne s'annule à cause des conditions au contour. On voit ainsi que toute solution de (1), dans les conditions données, annule δI .

14. 2° L'intégrale $\mathfrak{J}$ possède une borne inférieure. Soit (a, b) un

point intérieur à P. Posons

$$w(a, b) = w_1(a, b) + w_2(a, b)$$

et

$$w_1(a, b) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{p}} r^2 \log r \, dx \, dy \quad [r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}].$$

On a

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = 1$$

et, par suite, la relation

$$\Delta_2 \Delta_2 w = \Delta_2 \Delta_2 w_1 + \Delta_2 \Delta_2 w_2$$

se réduit à $\Delta_2 \Delta_2 w_2 = 0$.

Sur le contour,

$$\overline{w_1} = -\overline{w_2}, \quad \frac{d\overline{w_1}}{dn} = -\frac{d\overline{w_2}}{dn}.$$

$\mathfrak{J}$ s'écrit alors

$$\mathfrak{J} = \int_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w_1)^2 + \frac{1}{2} (\Delta_2 w_2)^2 + \Delta_2 w_1 \Delta_2 w_2 - (w_1 + w_2) \right] dx \, dy.$$

Mais, la relation (19) où l'on fait $U = w_1$, $V = w_2$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}} \Delta_2 w_1 \Delta_2 w_2 \, dx \, dy &= \int_{\mathbf{p}} w_2 \Delta_2 \Delta_2 w_1 \, dx \, dy + \int_{\mathbf{c}} \left(\Delta_2 w_1 \frac{dw_2}{dn} - w_2 \frac{d\Delta_2 w_1}{dn} \right) ds \\ &= \int_{\mathbf{p}} w_2 \, dx \, dy + \int_{\mathbf{c}} \left(-\frac{dw_1}{dn} \Delta_2 w_1 + w_1 \frac{d\Delta_2 w_1}{dn} \right) ds. \end{aligned}$$

$\mathfrak{J}$ devient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w_1)^2 + \frac{1}{2} (\Delta_2 w_2)^2 + w_2 - (w_1 + w_2) \right] dx \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{c}} \left(w_1 \frac{d\Delta_2 w_1}{dn} - \frac{dw_1}{dn} \Delta_2 w_1 \right) ds \\ &= \mathfrak{J}_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{p}} (\Delta_2 w_2)^2 \, dx \, dy, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$\mathbf{I}_0 = \int_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w_1)^2 - w_1 \right] dx \, dy + \int_{\mathbf{c}} \left(w_1 \frac{d\Delta_2 w_1}{dn} - \frac{dw_1}{dn} \Delta_2 w_1 \right) ds.$$

Ainsi $\mathfrak{J} \geq \mathfrak{J}_0$, d'où résulte l'existence d'une borne inférieure pour $\mathfrak{J}$.

P.

15. 3° Dans les conditions données, la solution du problème est unique. Soient ω et ω' deux solutions *différentes*.

On aurait, dans P,

$$(20) \quad \Delta_2 \Delta_2 (\omega - \omega') = 0$$

et sur C,

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}', \quad \frac{d\bar{\omega}}{dn} = \frac{d\bar{\omega}'}{dn}.$$

Multiplions (4) par $\omega - \omega'$ et intégrons dans toute la plaque. La formule de Mathieu donne

$$\int_P [\Delta_2 (\omega - \omega')]^2 dx dy = 0.$$

Ainsi, dans P, $\Delta_2 (\omega - \omega') = 0$. D'ailleurs, sur C, $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$, donc partout on aura

$$\omega = \omega'.$$

16. Introduisons maintenant une suite de fonctions $\psi_i(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, ... définies par la relation

$$\psi_i(x, y) = u_p(x) v_q(y),$$

$u_p(x)$ et $v_q(y)$ étant respectivement des solutions des équations

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = K^4 u(x), \quad \frac{d^4 v(y)}{dy^4} = K^4 v(y),$$

solutions déterminées au signe près par les conditions

$$\bar{u}(x) = 0, \quad \frac{d\bar{u}}{dx} = 0$$

pour $x = 0$ et $x = 1$ et par

$$\int_0^1 u^2 dx = 1.$$

Soient des conditions analogues pour $v(y)$.

Ces fonctions ψ_i possèdent les propriétés suivantes :

1° Dans P et sur C, ce sont des fonctions finies et continues de x et

de y . Il en est de même de leurs *dérivées principales*

$$\frac{d^{m+n}\psi_i}{dx^m dy^n} \quad (m = 0, 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3).$$

2° Sur C, quel que soit i ,

$$\bar{\psi}_i = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}_i}{dn} = 0.$$

3° Soit ζ une fonction arbitraire, finie et continue ainsi que ses dérivées principales, dans P et sur C, et nulle partout, sauf dans P. Supposons de plus $\frac{d^7\zeta}{dx^4 dy^3}$ et $\frac{d^7\zeta}{dx^3 dy^4}$ finies et continues dans P et sur C. On peut alors développer ζ en série absolument et uniformément convergente de fonctions ψ_i

$$(21) \quad \zeta = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{mn} u_m(x) v_n(y).$$

Multiplions en effet les deux membres de (21) par $u_m(x)v_n(y) dx dy$ et intégrons dans toute la plaque. Il vient, puisque les $u(x)$ et les $v(y)$ sont orthogonales et normales

$$a_{mn} = \int_P \zeta u_m(x) v_n(y) dx dy,$$

et, en intégrant par parties, trois fois par rapport à x

$$a_{mn} = -\frac{1}{K_m^4 K_n^4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{du_m}{dx} dx \frac{d^3\zeta}{dx^3} \frac{d^4v_n}{dy^4} dy,$$

car les intégrales simples s'annulent.

En intégrant par parties, trois fois par rapport à y , on a de même

$$a_{mn} = \frac{1}{K_m^4 K_n^4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^5\zeta}{dx^3 dy^3} \frac{du_m}{dx} \frac{dv_n}{dy} dx dy.$$

Enfin, en intégrant une fois par rapport à x et une fois par rapport à y ,

$$a_{mn} = \frac{1}{K_m^4 K_n^4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^8\zeta}{dx^4 dy^4} u_m v_n dx dy.$$

Supposons encore $\frac{d^3 \zeta}{dx^4 dy^4}$, $\frac{d^3 \zeta}{dx^4 dy^5}$ continues et $\frac{d^{10} \zeta}{dx^5 dy^5}$ finie, on peut intégrer par parties une fois par rapport à x et une fois par rapport à y et a_{mn} prend la forme

$$a_{mn} = \frac{\text{nombre fini}}{K_m^5 K_n^5}.$$

La série (21) est absolument et uniformément convergente ainsi que ses dérivées principales prises terme à terme et l'on peut trouver une suite de fonctions $\zeta_1, \dots, \zeta_m$,

$$(22) \quad \zeta_m = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_m \psi_m,$$

qui, dans P et sur C, ainsi que leurs dérivées principales, convergent uniformément vers ζ et ses dérivées principales.

4° Une somme de la forme (22) ne s'annule identiquement dans P que si tous les α_i sont nuls.

17. Considérons la suite limitée

$$\omega_m = a_1 \psi_1 + \dots + a_m \psi_m.$$

Déterminons les a_i par la condition que ω_m rende minimum l'intégrale $\mathfrak{s}$ par rapport à toutes les fonctions de même forme.

Remplaçons ω par ω_m dans $\mathfrak{s}$ qui devient

$$(23) \quad \mathfrak{s}_m = \int_P \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 \omega_m)^2 - \omega_m \right] dx dy;$$

$\mathfrak{s}_m$ est une fonction du second degré des a_i ; elle ne dépend pas de x et de y et nous pouvons écrire

$$\mathfrak{s}_m = \frac{1}{2} \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q - \sum_1^m \alpha_q a_q,$$

en posant

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int_P \Delta_2 \psi_p \Delta_2 \psi_q dx dy \quad \text{et} \quad \alpha_q = \int_P \psi_q dx dy.$$

Les conditions de minimum donnent les équations linéaires

$$\sum_{p=1}^m \alpha_{pq} a_p = \alpha_q \quad (q = 1, 2, \dots, m),$$

qui, m étant fixe, admettent une solution et une seule.

18. Quand m augmente indéfiniment, le minimum de $\mathfrak{J}_m$ décroît et tend vers une limite. Appelons $d'\varpi$ la différentielle totale de ϖ par rapport aux a_i et soit $\zeta_m = \sum_{p=1}^m A_p \psi_p$, les A_p étant arbitraires. On peut, si ε est infiniment petit, poser $da_p = \varepsilon A_p$. Il vient

$$d'\varpi = \varepsilon \zeta_m$$

et

$$d'\mathfrak{J} = \sum_{p=1}^m \frac{d\mathfrak{J}}{da_p} da_p = \int_{\mathfrak{p}} [\Delta_2 \varpi_m \Delta_2 d'\varpi_m - d'\varpi_m] dx dy = 0.$$

Après division par ε , on a

$$(24) \quad \int_{\mathfrak{p}} [\Delta_2 \varpi_m \Delta_2 \zeta_m - \zeta_m] dx dy = 0.$$

Faisons $\zeta_m = \varpi_m$, (24) devient

$$\int_{\mathfrak{p}} [(\Delta_2 \varpi_m)^2 - \varpi_m] dx dy = 0,$$

ce qui donne, avec (23),

$$(25) \quad \text{Minimum } \mathfrak{J}_m = \mathfrak{J}_m^0 = -\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{p}} (\Delta_2 \varpi_m)^2 dx dy.$$

Faisons une nouvelle approximation correspondant à l'indice $m+n$ de ϖ . Appelons a'_i , A'_p les nouvelles valeurs des a_i , A_p , et posons

$$a'_p - a_p = \varepsilon_p \quad (p = 1, \dots, m), \quad a'_p = \varepsilon_p \quad (p = m+1, \dots, m+n).$$

Il vient, si $\varphi_{mn} = w_{m+n} - w_m$,

$$\varphi_{mn} = \sum_{p=1}^{m+n} \varepsilon_p \psi_p, \quad \zeta_{mn} = \sum_{p=1}^{m+n} A'_p \psi_p.$$

Le minimum correspondant à la nouvelle approximation sera

$$\begin{aligned} (26) \quad \mathfrak{J}_{m+n}^{(0)} &= \int_{\mathbf{p}} \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w_m + \Delta_2 \varphi_{mn})^2 - (w_m + \varphi_{mn}) \right] dx dy \\ &= \mathfrak{J}_m^{(0)} + \int_{\mathbf{p}} \left[\Delta_2 w_m \Delta_2 \varphi_{mn} + \frac{1}{2} (\Delta_2 \varphi_{mn})^2 - \varphi_{mn} \right] dx dy, \end{aligned}$$

avec la condition

$$\int_{\mathbf{p}} [(\Delta_2 w_m + \Delta_2 \varphi_{mn}) \Delta_2 \zeta_{m+n} - \zeta_{m+n}] dx dy = 0.$$

Faisons $A'_p = \varepsilon_p$, c'est-à-dire $\zeta_{m+n} = \varphi_{mn}$, il vient pour (26)

$$\mathfrak{J}_{m+n}^{(0)} = \mathfrak{J}_m^{(0)} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{p}} (\Delta_2 \varphi_{mn})^2 dx dy.$$

Les $\mathfrak{J}_1^{(0)}, \mathfrak{J}_2^{(0)}, \dots$ forment une suite illimitée de nombres ne croissant jamais. Ils ont $\mathfrak{J}_0$ pour borne inférieure et tendent vers une limite $\mathfrak{J}^{(0)} \geq \mathfrak{J}_0$. On peut donc trouver M tel que, quel que soit $m > M$, on ait pour toute valeur de n ,

$$(27) \quad 2 |\mathfrak{J}_{m+n}^{(0)} - \mathfrak{J}_m^{(0)}| = \int_{\mathbf{p}} (\Delta_2 \varphi_{mn})^2 dx dy = \int_{\mathbf{p}} [\Delta_2 (w_{m+n} - w_m)]^2 dx dy < \eta,$$

η étant un nombre positif aussi petit qu'on veut.

19. La dernière inégalité permet de démontrer la convergence des approximations successives. Posons $\varphi = \frac{\varphi_{mn}}{\sqrt{\eta}}$, (27) devient

$$(28) \quad \int_{\mathbf{p}} (\Delta_2 \varphi)^2 dx dy < 1.$$

D'autre part, en tout point intérieur à P , on a

$$(29) \quad \varphi(a, b) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{p}} \log r \Delta_2 \varphi dx dy,$$

puisque, sur C,

$$\bar{\varphi} = 0, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dn} = 0.$$

Appelons P_1 la portion du domaine P dans laquelle $|\log r| \leq \Delta_2 \varphi$ et P_2 celle où $|\Delta_2 \varphi| < |\log r|$. Il vient

$$\begin{aligned} 2\pi |\varphi| &< \int_P |\log r| |\Delta_2 \varphi| dx dy < \int_{P_1} (\Delta_2 \varphi)^2 dx dy + \int_{P_2} (\log r)^2 dx dy \\ &< \int_P (\Delta_2 \varphi)^2 dx dy + \int_P (\log r)^2 dx dy. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est convergente. Si K est sa borne supérieure dans P, on aura

$$|\varphi| < \frac{1+K}{2\pi}$$

et

$$|\varphi_{mn}| = |\omega_{m+n} - \omega_m| < \frac{1+K}{2\pi} \sqrt{\eta'}.$$

Le nombre $\frac{1+K}{2\pi} \sqrt{\eta'}$ est indépendant de x, y et n . D'ailleurs, on peut toujours choisir M de façon que $\eta \leq \frac{4\pi^2}{(1+K)^2} \varepsilon^2$, ε étant donné à l'avance. Alors, pour toute valeur de $m > M$, quels que soient x, y et n , on aura

$$|\omega_{m+n} - \omega_m| < \varepsilon.$$

La suite $\omega_1, \dots, \omega_m$ converge uniformément dans tout le domaine P vers une limite $\omega(x, y)$ qui est une fonction continue s'annulant sur le contour C.

D'une façon analogue, on voit que, lorsque m augmente indéfiniment, les intégrales

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha}^x \omega_m dx, \quad \frac{d}{dx} \int_{\beta}^y \omega_m dy,$$

où (α, β) est un point intérieur à P et où le chemin d'intégration est

tout entier dans P, convergent uniformément vers

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha}^x \omega dx, \quad \frac{d}{dx} \int_{\beta}^y \omega dy.$$

De même, on montre que l étant un arc de courbe intérieur à P, arc pouvant coïncider en partie avec le contour C, $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_l \frac{d\omega_m}{dn} ds$ existe et s'annule sur C.

20. Ceci posé, en utilisant la remarque 3^o du paragraphe 16, Ritz prouve que la limite ω des ω_m est la solution cherchée. Il introduit les deux fonctions :

$$U_m = \int_{\alpha^{(s)}}^x \int_{\beta^{(s)}}^y \omega_m(x, y) dx^3 dy^3, \quad F = \int_{\alpha^{(s)}}^x \int_{\beta^{(s)}}^y dx^3 dy^3,$$

(α, β) et (x, y) étant des points de P.

Les fonctions $U_m, \frac{dU_m}{dx}, \frac{dU_m}{dy}, \dots, \frac{d^4 U_m}{dy^4}$ convergent uniformément vers $U, \dots, \frac{d^4 U}{dy^4}$, respectivement. Il en est de même de

$$\frac{d^5 U_m}{dx^4 dy}, \quad \frac{d^6 U}{dx^4 dy^2}, \quad \frac{d^5 U}{dy^4 dx}, \quad \frac{d^6 U}{dy^4 dx^2}.$$

Enfin

$$\frac{d^6 U_m}{dx^3 dy^3} = \omega_m, \quad \frac{d^7 U_m}{dx^4 dy^3} = \frac{d\omega_m}{dx}, \quad \frac{d^7 U_m}{dx^3 dy^4} = \frac{d\omega_m}{dy}$$

s'annulent sur C.

L'équation (24) s'écrit

$$(30) \quad \int_P \left[\left(\frac{d^8 U_m}{dx^5 dy^3} + \frac{d^8 U_m}{dx^3 dy^5} \right) \left(\frac{d^2 \zeta_m}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_m}{dy^2} \right) - \frac{d^6 F}{dx^2 dy^3} \zeta_m \right] dx dy = 0.$$

Comme nous ne savons pas si les dérivées qui entrent dans cette expression convergent, nous allons la transformer par des intégrations

par parties. On a

$$\begin{aligned} & \int_P \frac{d^8 U_m}{dx^5 dy^3} \frac{d^4 \zeta_m}{dx^2} dx dy \\ &= \int_C \left[\frac{d^7 U}{dx^4 dy^3} \frac{d^3 \zeta_m}{dx^2} \cos(n, x) \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{d^6 U_m}{dx^4 dy^2} \frac{d^3 \zeta_m}{dx^3} + \frac{d^5 U_m}{dx^4 dy} \frac{d^4 \zeta_m}{dx^3 dy} - \frac{d^4 U_m}{dx^4} \frac{d^5 \zeta_m}{dx^3 dy^2} \right) \cos(n, y) \right] ds \\ & \quad + \int_P \frac{d^4 U_m}{dx^4} \frac{d^6 \zeta_m}{dx^3 dy^3} dx dy. \end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale curviligne est nul et dans les autres termes, les dérivées de U_m sont convergentes.

D'ailleurs, dans tous ces termes n'entrent que les dérivées principales de ζ_m . Enfin, dans l'intégrale de surface du second membre, $\frac{d^4 U_m}{dx^4}$ est convergente. Nous avons choisi ζ_m de façon qu'elle converge, ainsi que ses dérivées principales, vers la fonction arbitraire ζ et ses dérivées principales. A la limite, d'après la définition de ζ , l'intégrale curviligne s'évanouit.

Les autres termes de (30) se transforment de même et il vient

$$(31) \quad \int_P (\Delta_2 \Delta_2 U - F) \frac{d^6 \zeta_m}{dx^3 dy^3} dx dy = 0.$$

Un lemme de M. Hilbert (*Festschrift zur Feier der Gesellschaft zu Göttingen*, § 4, 1901) permet de déduire de (31)

$$(32) \quad \Delta_2 \Delta_2 U - F = X + yX' + y^2 X'' + Y + xY' + x^2 Y'',$$

X, X', X'' étant des fonctions continues de x seul et Y, Y', Y'' des fonctions continues de y seul. Posons alors

$$\begin{aligned} V = U - \int_0^{x^{(4)}} dx^4 (X + yX' + y^2 X'') - \int_0^{y^{(4)}} dy^4 (Y + xY' + x^2 Y'') \\ + 2 \int_0^{x^{(6)}} X'' dx^6 + 2 \int_0^{y^{(6)}} Y'' dy^6 \\ (0 \leq x^{(4)} < 1, 0 \leq y^{(4)} < 1). \end{aligned}$$

Il vient, dans P,

$$(33) \quad \Delta_2 \Delta_2 V = F(x, y).$$

P.

V et ses dérivées jusqu'au quatrième ordre sont finies et continues dans P et sur C. Donc, (ξ, η) étant un point intérieur à P,

$$(33) \quad V(\xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} \int_P r^2 \log r F(x, y) dx dy + T,$$

T étant une intégrale curviligne satisfaisant à $\Delta_2 \Delta_2 T = 0$.

Mais, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_P r^2 \log r F(x, y) dx dy &= \int_P \frac{d}{d\xi} r^2 \log r F dx dy \\ &= - \int_P \frac{d}{dx} (r^2 \log r) F dx dy \\ &= - \int_C r^2 \log r F \cos(n, x) ds + \int_P r^2 \log r \frac{dF}{dx} ds. \end{aligned}$$

Puisque F et ses dérivées principales sont continues, on peut dériver trois fois par rapport à ξ et trois fois par rapport à η et il vient

$$\frac{d^6 V}{d\xi^3 d\eta^3} = \frac{d^6 U}{d\xi^3 d\eta^3} = \omega(\xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} \int_P r^2 \log r + T_1,$$

où T_1 satisfait à l'équation $\Delta_2 \Delta_2 T_1 = 0$.

En différentiant sous le signe *somme*, on voit que les dérivées de ω jusqu'au quatrième ordre, sont finies et continues et l'on a, dans toute la plaque,

$$\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1.$$

D'ailleurs, on sait que $\omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = 0$ sur le bord.

De l'existence de $\frac{d\omega}{dx}, \frac{d\omega}{dy}$ résulte que, pour tout arc de courbe l intérieur à P, $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_l \frac{d\omega_m}{dn} ds$ dont l'existence a été démontrée, est

$$\int_l \frac{d\omega}{dn} ds.$$

Si l se rapproche du contour C et vient coïncider en partie avec lui, cette limite est nulle sur le contour. Alors, à cause de l'uniformité

de la convergence, $\int \frac{dw}{dn} ds = 0$, pour toute portion de C, si petite soit-elle. Donc, sur le bord, $\frac{dw}{dn} = 0$.

Les approximations successives w_m convergent vers une fonction w qui satisfait aux conditions au contour et aux conditions de continuité. Elle vérifie l'équation $\Delta_2 \Delta_2 w = 1$; c'est la solution cherchée.

21. Il reste à effectuer le calcul numérique.

Nous portons une expression de la forme

$$w_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} u_m(x) v_n(y),$$

dans l'intégrale $\mathfrak{J}$ qui devient

$$\mathfrak{J}_{MN} = \int_P \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w_{MN})^2 - w_{MN} \right] dx dy.$$

Les conditions de minimum s'écrivent

$$\frac{d\mathfrak{J}_{MN}}{da_{\mu\nu}} = \int_P [\Delta_2 w_{MN} \Delta_2 (u_\mu v_\nu) - u_\mu v_\nu] dx dy = 0$$

ou enfin

$$(34) \quad \int_0^1 \int_0^1 (\Delta_2 \Delta_2 w_{MN} - 1) u_\mu v_\nu dx dy = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, M; \nu = 1, 2, \dots, N).$$

Comme la charge $f(x, y) = 1$ est une fonction paire, on voit qu'il suffit de donner à m et n des valeurs impaires.

Alors, les relations établies au paragraphe 6 nous donnent :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0,9825; & \alpha_3 = 0,99997; & \alpha_5 = 0,99999. \\ K_1 = 4,7300; & K_3 = 10,9956; & K_5 = 17,2788. \\ K_1^2 = 22,37; & K_3^2 = 120,90; & K_5^2 = 298,55. \\ K_1^4 = 500,55; & K_3^4 = 14618; & K_5^4 = 89134. \\ \sigma_{11} = -12,302; & \sigma_{33} = -98,904; & \sigma_{55} = -264. \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 9,732; & \sigma_{15} = \sigma_{51} = 7,616; & \sigma_{35} = \sigma_{53} = 24,34. \end{array}$$

Prenons d'abord $M = N = 1$, le système (34) se réduit à la seule équation

$$A_{11}[2K_1^4 + 2\mathcal{I}_{11}^2] = \frac{16\alpha_1^2}{K_1^2},$$

puisque

$$\int_0^1 u_1^2 dx = \int_0^1 v_1^2 dx = 1,$$

et qu'on trouve facilement

$$\int_0^1 u_m dx = -\frac{4\alpha_m}{K_m} \quad (m \text{ impair}).$$

Il vient

$$A_{11} = 0,6620l \quad \text{si} \quad l = 8,10^{-4}.$$

En deuxième approximation, $M = N = 2$. Le système (34) se compose de trois équations dont nous n'écrivons en détail que la première,

$$A_{11}[2K_1^4 + 2\mathcal{I}_{11}^2] + A_{13}[(K_1^4 + K_3^4) \cdot 0,2 + 2\mathcal{I}_{11}\mathcal{I}_{13} \cdot 2] + A_{33}[2K_3^4 \cdot 0 + 2\mathcal{I}_{13}^2] = \frac{16\alpha_1^2}{K_1^2},$$

qui, les calculs développés, s'écrit

$$651,8A_{11} - 239,2A_{13} + 97,4A_{33} = 431,5l.$$

Les deux autres équations du système sont :

$$\begin{aligned} -119,6A_{11} + 8867A_{13} - 961A_{33} &= 188,5l, \\ 94,7A_{11} - 1822A_{13} + 24396A_{33} &= -82,7l. \end{aligned}$$

Pour trouver les coefficients, Ritz utilise le fait que les termes de la diagonale sont plus grands que les autres et il fait le calcul par approximations successives.

Il vient

$$A_{11} = l \cdot 0,6727, \quad A_{13} = l \cdot 0,0307, \quad A_{33} = l \cdot 0,0031.$$

Enfin une troisième approximation lui donne

$$\begin{aligned} w_3 = l[&0,6740u_1v_1 + 0,0308(u_1v_3 + u_3v_1) + 0,0032u_3v_3 \\ &+ 0,0040(u_1v_5 + u_5v_1) + 0,0004(u_3v_5 + u_5v_3) + 0,0000u_5v_5). \end{aligned}$$

La comparaison des trois approximations montre que leur convergence est rapide. Ainsi, pour la flèche de courbure, on trouve successivement : 1,669; 1,559; 1,579.

Si la charge uniforme était p par unité d'aire et si le côté du carré était a , on verrait facilement qu'il faut multiplier les résultats précédents par $p.a^4$ et prendre, au lieu de l'expression du paragraphe 6,

$$u_m = \left(\cos \frac{K_m x}{a} - \operatorname{ch} \frac{K_m x}{a} \right) - \left(\sin \frac{K_m x}{a} - \operatorname{sh} \frac{K_m x}{a} \right) \alpha_m.$$

La généralisation au cas du rectangle de côtés a et b est immédiate.

22. Pour pousser plus loin l'étude de la solution de Ritz, calculons d'abord la valeur du déplacement en divers points de la plaque. A cause de la symétrie de la charge et des liaisons, nous pouvons nous borner à faire le calcul pour les points d'un quart de la plaque. Donnons d'abord les valeurs numériques des $u_m(x)$ et $v_n(y)$ en ces points :

$x = y =$	0,125	0,250	0,375	0,500
$u_1(x) = v_1(y) =$	0,282	-0,863	-1,384	-1,588
$u_3 = v_3 =$	1,039	-1,371	+0,259	+1,407
$u_5 = v_5 =$	1,502	+0,528	+0,785	-1,414

Il vient maintenant pour $\frac{w_3}{l}$:

$y = 0,500$	0,347	0,949	1,413	1,579
$y = 0,375$	0,311	0,849	1,260	1,413
$y = 0,250$	0,213	0,575	0,849	0,949
$y = 0,125$	0,079	0,213	0,311	0,347
$x =$	0,125	0,250	0,375	0,500

Des calculs semblables, dont les résultats concordent sensiblement avec les précédents ont été donnés par M. G. Knott (*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, t. XXXII, 1912, p. 390). M. Knott, sur les indications de M. H. Love, compare les résultats expérimentaux obtenus par un ingénieur de Belfast, M. Crawford, avec ceux du calcul et il conclut de cette comparaison à une concordance satisfaisante entre le calcul et l'expérience.

23. Voyons maintenant comment les diverses approximations de Ritz vérifient l'équation fondamentale $\Delta_2 \Delta_2 w = 1$. Pour le calcul, nous aurons besoin des valeurs de u_1'' , u_3'' , u_5'' .

$$u_m''(x) = K_m^2 [-\cos K_m x - \operatorname{ch} K_m x + (\sin K_m x + \operatorname{sh} K_m x) \alpha_m].$$

$x = \gamma =$	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500
$u_1'' = v_1'' =$	-44,7	-18,95	+4,4	+21,1	+27,2
$u_3'' = v_3'' =$	-241,8	+64,4	+150,2	-35,4	-171,9
$u_5'' = v_5'' =$	-597	+380	-166	-235	+422

Voyons la première approximation :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,662 [2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1''] = \frac{10,592}{10^4} [K_1^4 u_1 v_1 + u_1'' v_1''],$$

Centre :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = \frac{10,592}{10^4} [500,55 (-1,588)^2 + (27,2)^2] = +2,1;$$

Quart diagonale :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = \frac{10,592}{10^4} [500,55 (-0,863)^2 + (4,4)^2] = +0,4;$$

Sommet :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = \frac{10,592}{10^4} [0 + (-44,7)^2] = +2,1;$$

Quart médiane :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = \frac{10,592}{10^4} [500,55 (-1,588) (-0,863) + 27,2 \cdot 4,4] = 0,85.$$

Milieu du côté :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = \frac{10,592}{10^4} [0 + 27,2 (-44,7)] = -1,3.$$

Dans la deuxième approximation :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Delta_2 w_2 = 10^{-4} [& 5,3816 (2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1'') \\ & + 0,2456 [(K_1^4 + K_3^4) (u_1 v_3 + u_3 v_1) + 2 u_1'' v_3'' + 2 u_3'' v_1''] \\ & + 0,0248 (2 K_3^4 u_3 v_3 + 2 u_3'' v_3'')], \end{aligned}$$

et l'on a

Centre :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_2 = -2,15 - 2,11 + 0,29 = +0,33;$$

Quart diagonale :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_2 = 0,42 + 0,94 + 0,25 = +1,6;$$

Sommet :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_2 = -2,14 + 1,06 + 0,29 = +3,5;$$

Quart médiane :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_2 = 0,87 + 0,52 - 0,27 = +1,1;$$

Milieu du côté :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_2 = -1,3 + 0,05 + 0,21 = -1,0.$$

Enfin, la troisième approximation donne :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Delta_3 w_3 = 10^{-4} & \{ 5,392 (2K_1^1 u_1 v_1 + 2u_1'' v_1'') \\ & + 0,2464 [(K_1^1 + K_4^3) (u_1 v_3 + u_3 v_1) + 2u_1'' v_3'' + 2u_3'' v_1''] \\ & + 0,0256 (2K_3^1 u_3 v_3 + 2u_3'' v_3'') \\ & + 0,0320 [(K_1^1 + K_5^1) (u_1 v_5 + u_5 v_1) + 2u_1'' v_5'' + 2u_5'' v_1''] \\ & + 0,0032 [(K_3^1 + K_5^1) (u_3 v_5 + u_5 v_3) + 2u_3'' v_5'' + 2u_5'' v_3''] \}. \end{aligned}$$

Centre :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_3 = +0,33 + 1,43 - 0,23 = +1,5;$$

Quart diagonale :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_3 = +1,6 - 0,27 - 0,06 = +1,3;$$

Sommet :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_3 = +3,5 + 0,35 + 0,19 = +4,0;$$

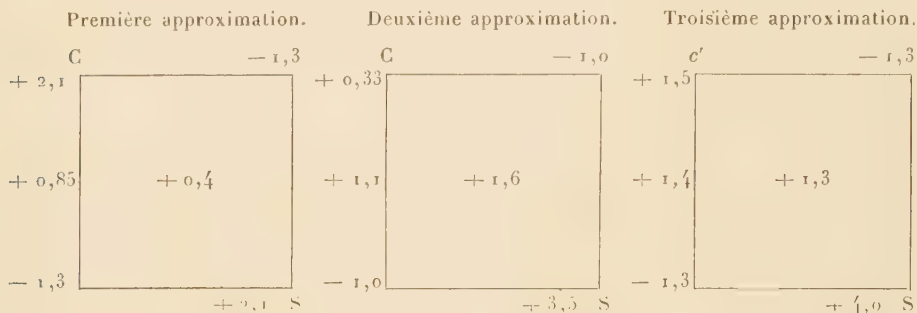
Quart médiane :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_3 = +1,12 + 0,09 + 0,15 = +1,4;$$

Milieu de côté :

$$\Delta_2 \Delta_2 w_3 = -1,04 - 0,22 + 0,00 = -1,3.$$

Nous résumons ce calcul en portant les chiffres obtenus aux points correspondants de la plaque, en nous bornant toujours au quart de la plaque.



C = centre de la plaque; S = sommet.

On voit bien ainsi qu'en troisième approximation, l'équation $\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1$ n'est pas mieux vérifiée qu'en première ou en seconde approximation. Dans aucune des approximations, la répartition de la charge n'est uniforme. Il faut remarquer que Ritz a prévu ce fait; il dit, à la fin du paragraphe 5 de son Mémoire, après avoir démontré la congruence uniforme des ω_m vers la fonction ω : « Nous avons déjà remarqué plus haut que les dérivées secondes des ω_m convergeront dans la plupart des applications. Au contraire, il n'y a aucune raison générale pour que les dérivées quatrièmes convergent aussi. En général donc, si l'on porte les approximations ω_m dans l'équation

$$\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1,$$

cette équation ne sera pas vérifiée avec une exactitude croissante quand m croîtra. »

Une autre vérification que nous allons essayer consiste à calculer $\int_P \Delta_2 \Delta_2 \omega dx dy$ et à voir si elle tend vers l'unité dans les approximations successives de Ritz.

Nous partons de la relation

$$\int_P \Delta_2 \Delta_2 \omega dx dy = \int_C \frac{d\Delta_2 \omega}{du} ds.$$

Elle s'écrit, si OA est le côté de la plaque qui coïncide avec l'axe des x ,

$$\int_P \Delta_2 \Delta_2 w \, dx \, dy = -4 \int_{0A} \frac{d \Delta_2 w}{dy} \, dx.$$

Faisons le détail du calcul pour la première approximation. On a

$$w_1 = \frac{5,296}{10^4} u_1(x) v_1(y), \quad \frac{d \Delta_2 w_1}{dy} = \frac{5,296}{10^4} [u_1''(x) v_1'(y) + u_1'(x) v_1''(y)].$$

Or

$$v_m'(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_m'''(0) = 2 \alpha_m K_m^3$$

et

$$\int_P \Delta_2 \Delta_2 w_1 \, dx \, dy = -4 \int_{0A} \frac{d \Delta_2 w_1}{dy} = \frac{5,296}{10^4} \times 32 K_1^2 \alpha_1^2 = 0,366,$$

expression qu'on trouverait sans peine par le calcul direct.

Pour la seconde approximation, il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 \Delta_2 \Delta_2 w_2 \, dx \, dy = 0,3699 + 0,2247 + 0,0099 = 0,60$$

et pour la troisième

$$\int_0^1 \int_0^1 \Delta_2 \Delta_2 w_3 \, dx \, dy = 0,3703 + 0,2254 + 0,0102 + 0,1090 + 0,0056 = 0,72.$$

Il peut bien y avoir convergence vers l'unité, mais cette convergence est très lente.

Outre le caractère précédent, la solution de Ritz présente un inconvénient sérieux, les approximations w_1, w_2, w_3 paraissent converger assez rapidement. Mais la méthode ne donne aucun moyen d'apprécier le degré d'exactitude obtenu quand on s'arrête à une approximation comptant un nombre donné de termes. Pour juger de la valeur pratique de la méthode, nous l'appliquerons plus loin à l'étude de problèmes déjà résolus autrement et nous comparerons les résultats.

24. Mais avant de laisser le problème de la plaque encastree, nous

allons essayer l'application de la méthode des moindres carrés telle qu'elle est indiquée par M. Boussinesq dans sa *Théorie de la chaleur* (t. I, p. 316). M. Boussinesq partant directement de l'équation indéfinie à vérifier $\Delta_2 \Delta_2 \omega - 1 = 0$ rend le plus petit possible le carré moyen de l'erreur

$$I = \int_p (\Delta_2 \Delta_2 \omega - 1)^2 dx dy.$$

Essayons cette méthode en nous servant de la série indéfinie de solutions particulières imaginée par Ritz. L'avantage de cette méthode sur celle de Ritz est que l'on connaît déjà le minimum que donne, à l'intégrale I que l'on considère, la solution exacte, puisque ce minimum est zéro. En outre, on sait, intuitivement, que le minimum de I obtenu en se bornant à n coefficients est une valeur de l'intégrale I pour le cas où on les prend tous, savoir, la valeur particulière que prend I dans le cas où seuls, les n premiers coefficients sont différents de zéro. Ainsi, le minimum de I s'abaissera à mesure qu'on prendra de plus en plus de coefficients. Comme il ne peut être plus petit que zéro, l'intégrale I tendra bien vers une limite inférieure. Il est vrai qu'on ne sait pas si ce minimum tendra vers zéro quand le nombre n des coefficients augmentera indéfiniment.

Quoi qu'il en soit, appliquons cette méthode. Avec un seul coefficient,

$$\omega_1 = A_{11} u_1 v_1,$$

d'où

$$\Delta_2 \Delta_2 \omega_1 \equiv A_{11} (2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1'') = 1.$$

Le carré moyen de l'erreur est

$$I = \int_0^1 \int_0^1 [1 - A_{11} (2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1'')]^2 dx dy.$$

La condition de minimum, $\frac{dI}{dA_{11}} = 0$, donne

$$\int_0^1 \int_0^1 [1 - A_{11} (2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1'')] (2 K_1^4 u_1 v_1 + 2 u_1'' v_1'') dx dy = 0,$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned} & A_{11} \int_0^1 \int_0^1 (2K_1^4 u_1 v_1 + 2u_1'' v_1'') (K_1^4 u_1 v_1 + u_1'' v_1'') dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (K_1^4 u_1 v_1 + u_1'' v_1'') dx dy. \end{aligned}$$

Mais on a (§ 6)

$$\int_0^1 u_1''(x) dx = 0, \quad \int_0^1 v_1''(y) dy = 0,$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} & 2A_{11} \left(K_1^8 \int_0^1 u_1^2 dx \int_0^1 v_1^2 dy \right. \\ & \quad \left. + 2K_1^4 \int_0^1 u_1 u_1'' dx \int_0^1 v_1 v_1'' dy + \int_0^1 u_1''^2 dx \int_0^1 v_1''^2 dy \right) \\ &= K_1^4 \int_0^1 u_1 dx \int_0^1 v_1 dy \end{aligned}$$

ou, en introduisant les valeurs numériques déjà données plus haut (§ 21),

$$A_{11} [K_1^4 + 2(-12,302)^2 + K_1^4] = \frac{8\alpha_1^2}{K_1^2}.$$

Il vient pour A_{11} exactement la moitié de la valeur du coefficient A_{11} obtenu en première approximation par Ritz et l'on a

$$w_1 = \frac{2,648}{10^4} u_1 v_1.$$

Calculons une nouvelle approximation en prenant

$$\begin{aligned} w_2 &= A_{11} u_1 v_1 + A_{13} (u_1 v_3 + u_3 v_1) + A_{33} u_3 v_3, \\ \Delta_2 \Delta_2 w_2 &= A_{11} (2K_1^4 u_1 v_1 + 2u_1'' v_1'') \\ & \quad + A_{13} [(K_1^4 + K_3^4) (u_1 v_3 + u_3 v_1) + 2u_1'' v_3'' + 2u_3'' v_1''] \\ & \quad + A_{33} (2K_3^4 u_3 v_3 + 2u_3'' v_3''). \end{aligned}$$

Le carré moyen de l'erreur sur toute la plaque est

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [A_{11}(2K_1^4 u_1 v_1 + 2u_1'' v_1'') + A_{13}[(K_1^4 + K_3^4)(u_1 v_3 + u_3 v_1) + 2u_1'' v_3'' + 2u_3'' v_1''] + A_{33}(2K_3^4 u_3 v_3 + 2u_3'' v_3'')] \right\}^2 dx dy = E.$$

Il faut écrire les trois équations

$$\frac{dE}{dA_{11}} = 0, \quad \frac{dE}{dA_{13}} = 0, \quad \frac{dE}{dA_{33}} = 0.$$

Développons les calculs pour la première seulement.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [A_{11}(2K_1^4 u_1 v_1 + 2u_1'' v_1'') + A_{13}[(K_1^4 + K_3^4)(u_1 v_3 + u_3 v_1) + 2u_1'' v_3'' + 2u_3'' v_1''] + A_{33}(2K_3^4 u_3 v_3 + 2u_3'' v_3'')] \right\} \\ \times (K_1^4 u_1 v_1 + u_1'' v_1'') dx dy = 0. \end{aligned}$$

Effectuons les calculs indiqués et introduisons les valeurs numériques, il vient

$$\begin{aligned} 2A_{11}[K_1^8 + 2K_1^4(-12,302)^2 + K_1^8] + A_{13}[2K_1^4(-12,302)9,73,2 \\ + (K_1^4 + K_3^4)(-12,302)9,73,2] \\ + 2A_{33}[K_1^4(9,73)^2 + K_3^4(9,73)^2] = K_1^4 \frac{16\alpha_1^2}{K_1^2}. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, il vient enfin

$$652A_{11} - 1927A_{13} + 1430A_{33} = 0, 173.$$

On obtient de la même façon les deux équations

$$\begin{aligned} -255A_{11} + 17432A_{13} - 5644A_{33} = 0, 302, \\ 49A_{11} - 1460A_{13} + 24399A_{33} = 0, 033. \end{aligned}$$

Dans ce cas encore, on peut résoudre par approximations successives, en se servant du fait que les coefficients de la diagonale sont plus grands que les autres, et l'on trouve

$$A_{11} = \frac{3,281}{10^4}, \quad A_{13} = \frac{0,227}{10^4}, \quad A_{33} = \frac{0,021}{10^4}$$

et

$$w_2 = 10^{-4} [3,281 u_1 v_1 + 0,227 (u_1 v_3 + u_3 v_1) + 0,021 u_3 v_3].$$

Nous ne faisons pas une nouvelle approximation avec six coefficients, les calculs deviennent trop laborieux.

Calculons encore $\Delta_2 \Delta_2 w$ pour les deux approximations que nous avons obtenues. Il vient pour la première :

$$\begin{aligned} \text{centre} &= +1,05; & \text{quart diagonale} &= +0,2; & \text{sommet} &= +1,05; \\ \text{quart médiane} &= +0,43 & \text{milieu du côté} &= -0,65. \end{aligned}$$

Pour la seconde, on a :

Centre :

$$+1,31 - 1,94 + 0,24 = -0,4;$$

Quart diagonale :

$$+0,26 + 0,86 + 0,21 = +1,3;$$

Sommet :

$$+1,31 + 0,98 + 0,24 = +2,5;$$

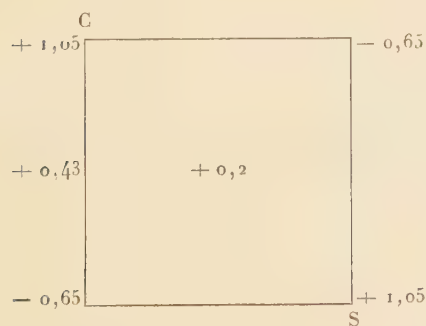
Quart médiane :

$$+0,53 + 0,48 - 0,23 = +0,8;$$

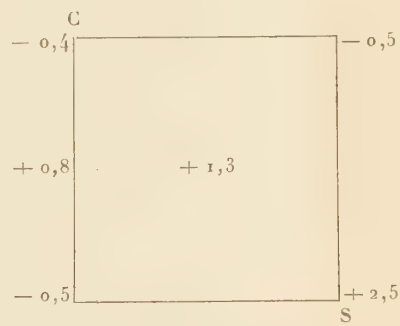
Milieu du côté :

$$-0,79 + 0,05 + 0,18 = -0,5.$$

Reportons encore ces résultats sur le quart de la plaque.



Première approximation.



Deuxième approximation

L'équation $\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1$ n'est vérifiée par aucune des deux approximations et les écarts d'avec l'unité restent très notables. Les résultats de la méthode des moindres carrés présentent donc le même caractère que ceux de la méthode de Ritz. En outre, on voit par les calculs précédents que, dans la méthode des moindres carrés, la convergence est lente.

Enfin, les expressions du déplacement ω obtenues, en première et en deuxième approximation, sont très différentes dans les deux méthodes.

25. Une troisième méthode que nous allons appliquer consiste à disposer des constantes de manière à rendre $\Delta_2 \Delta_2 \omega$ égal à l'unité : tout d'abord, en moyenne, sur toute l'aire de la plaque carrée, puis, en divers points déterminés de celle-ci.

Prenons d'abord un seul coefficient et écrivons que $\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1$ en moyenne sur toute la plaque

$$\Delta_2 \Delta_2 \omega_1 = 2 A_{11} (K_1^4 u_1 v_1 + u_1'' v_1'') = 1.$$

Multiplions par $dx dy$ et intégrons dans toute la plaque, il vient

$$2 A_{11} \left(K_1^4 \frac{16 \alpha_1^2}{K_1^2} \right) = 1, \quad A_{11} = \frac{1}{691},$$

$$\omega_1 = \frac{14,47}{10^4} u_1 v_1;$$

d'où l'on trouve pour $\Delta_2 \Delta_2 \omega$:

$$\begin{aligned} \text{centre} &= +5,8; & \text{quart diagonale} &= +1,1; & \text{sommet} &= +5,8; \\ \text{quart médiane} &= +2,3; & \text{milieu du côté} &= -3,5. \end{aligned}$$

En seconde approximation, déterminons trois constantes en écrivant que l'équation est vérifiée : 1° en moyenne sur la plaque; 2° au centre; 3° au sommet. Il vient :

$$\begin{aligned} 691 A_{11} + 9140 A_{13} + 3870 A_{33} &= 1, \\ 4000 A_{11} - 86300 A_{13} + 117000 A_{33} &= 1, \\ 4000 A_{11} + 43200 A_{13} + 117000 A_{33} &= 1; \end{aligned}$$

d'où

$$w_2 = 10^{-4} [17,32 u_1 v_1 + o(u_1 v_3 + u_3 v_1) - 0,51 u_3 v_3].$$

Comme il le faut, on a sensiblement, $\Delta_2 \Delta_2 w = 1$ au centre et au sommet; mais au quart de la diagonale, $\Delta_2 \Delta_2 w_2 = -3,6$. Les écarts sont encore plus notables que dans les méthodes précédentes.

26. On pourrait penser que les écarts précédents sont dus aux larges ondulations que donne, dans les fonctions u_m , la combinaison des sinus et cosinus circulaires avec les fonctions hyperboliques. Mais il semble que ces écarts se produisent aussi si l'on emploie un polynôme. Supposons, par exemple, pour plus de symétrie, le côté de la plaque égal à deux, l'origine des axes étant en son centre. On peut supposer

$$w = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 [A + B(x^2 + y^2) + \dots].$$

En se bornant à une constante, il vient

$$w_1 = 0,0213 (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2,$$

expression qui donnerait pour la flèche au centre de la plaque une valeur égale, à 5 pour 100 près, à celle obtenue par la méthode de Ritz en troisième approximation.

On trouve, pour

$$\Delta_2 \Delta_2 w_1 = 0,0213 [24(x^2 - 1)^2 + 24(y^2 - 1)^2 + 32(3x^2 - 1)(3y^2 - 1)]:$$

$$\text{centre} = +1,7; \quad \text{quart diagonale} = +0,6; \quad \text{sommet} = +2,7;$$

$$\text{quart médiane} = +0,7; \quad \text{milieu du côté} = -0,9.$$

Les oscillations sont tout à fait analogues à celles obtenues dans la première approximation au moyen des fonctions $u_m(x)$.

Nous n'avons pas calculé une deuxième approximation avec le polynôme, les calculs deviennent d'une longueur rebutante.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE RITZ A DIVERS PROBLÈMES D'ÉQUILIBRE DE LA PLAQUE CARRÉE.

27. Supposons d'abord qu'aucun des côtés de la plaque n'est libre. Pour poser le problème comme problème de calcul des variations, nous partirons, comme Ritz, de l'énergie potentielle de déformation de la plaque. Cette énergie potentielle est, au facteur $\frac{Eh^3}{3(1-\mu)}$ près [E = module d'élasticité, $2h$ = épaisseur de la plaque, $\mu = \frac{1}{4}$ (Poisson) ou $\frac{1}{3}$ (Wertheim)]

$$(35) \quad W = \int_p \left\{ \frac{1}{2} (\Delta_2 w)^2 - (1-\mu) \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Dans tous les cas où aucun des côtés de la plaque n'est libre, W peut se mettre sous la forme plus simple

$$W = \int_p \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w)^2 \right] dx dy.$$

Deux intégrations par parties montrent que le terme en $(1-\mu)$ est nul si l'on tient compte des conditions au contour sur des bords appuyés ou encastrés.

En tenant compte du travail de la charge $f(x, y) = 1$ par unité d'aire, il vient, pour l'intégrale à rendre minimum, l'intégrale dont Ritz est parti

$$(18) \quad \int_p \left[\frac{1}{2} (\Delta_2 w)^2 - w \right] dx dy.$$

L'application de la formule de Mathieu montre, comme au paragraphe 13, que toute solution de l'équation $\Delta_2 \Delta_2 w = 1$ annule $\delta \mathfrak{A}$ si l'on tient compte des conditions sur les côtés appuyés ou encastrés.

Nous pouvons maintenant appliquer le procédé de Ritz, en choisissant, dans chaque cas, comme fonctions suivant lesquelles nous développerons w , les solutions $u_m(x)$ ou $v_n(y)$ relatives au cas correspondant de la théorie des tiges.

28. PLAQUE APPUYÉE SUR SES QUATRE BORDS. — Les fonctions $u_m(x)$ et $v_n(y)$ sont ici (§ 7)

$$u_m(x) = \sin m\pi x, \quad v_n(y) = \sin n\pi y.$$

Nous prenons

$$w_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y.$$

Les équations (34) sont

$$\int_0^1 \int_0^1 (\Delta_2 \Delta_2 w_{MN} - 1) \sin \mu\pi x \sin \nu\pi y \, dx \, dy = 0$$

$$(\mu = 1, \dots, M; \nu = 1, 2, \dots, N)$$

avec

$$\Delta_2 \Delta_2 w_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \pi^4 (m^2 + n^2) \sin m\pi x \sin n\pi y.$$

Les liaisons de la plaque sont symétriques et $f(x, y) = 1$ est paire en x et y . Il suffit de donner à m et à n des valeurs *impaires*. Nous retombons sur la solution de Navier. Avec trois coefficients, il vient

$$w_3 = \frac{4}{\pi^6} \left[\sin \pi x \sin \pi y + \frac{1}{75} (\sin \pi x \sin 3\pi y + \sin \pi y \sin 3\pi x) \right. \\ \left. + \frac{1}{729} \sin 3\pi x \sin 3\pi y \right].$$

Calculons la *flèche au centre* :

$$\sin \pi x = \sin \pi y = +1, \quad \sin 3\pi x = \sin 3\pi y = -1$$

$$\frac{w}{l} = 0,975 \quad \text{avec} \quad l = \frac{4}{\pi^6}.$$

Remarques. — I. Dans ce cas, la méthode de Navier, celle de Ritz et celle des moindres carrés conduisent aux mêmes résultats.

II. L'équation $\Delta_2 \Delta_2 w = 1$ n'est pas vérifiée par la solution précédente. On a en effet, pour $\Delta_2 \Delta_2 w_3$:

$$\begin{aligned} \text{centre} &= +0,72; & \text{quart diagonale} &= +1,44; & \text{sommet} &= 0,0; \\ \text{quart médiane} &= +1,015; & \text{milieu du côté} &= 0,0. \end{aligned}$$

La remarque I ne s'applique pas aux exemples suivants, mais bien la remarque II.

29. PLAQUE DONT TROIS BORDS SONT APPUYÉS ET LE QUATRIÈME ENCASTRÉ. — Supposons les bords appuyés opposés parallèles à l'axe des x et le bord encastré pris pour axe des y . Nous prenons

$$w_{MN} = \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^N A_{mn} u_m(x) \sin n\pi y,$$

où $u_m(x)$ a l'expression (15) du paragraphe 9; $m = 1, 2, 3, \dots$ et

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{aligned} K_1 &= 3,9266; & K_1^2 &= 15,42; & K_1^4 &= 237,7; \\ K_2 &= 7,0686; & K_2^2 &= 49,97; & K_2^4 &= 2496,5; \\ K_3 &= 10,2102; & K_3^2 &= 104,25; & K_3^4 &= 10867. \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1,0008; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1,0000.$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 4,28; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 3,8; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 7,8;$$

$$\sigma_{11} = -11,51; \quad \sigma_{22} = -42,9; \quad \sigma_{33} = -94,04.$$

$$\int_0^1 u_1 dx = -0,8599; \quad \int_0^1 u_m dx = -\frac{0,5858}{K_m} \quad (m \text{ pair});$$

$$\int_0^1 u_m dx = -\frac{3,4142}{K_m} \quad (m \text{ impair}).$$

Les trois premières approximations sont successivement :

$$w_1 = l,1530 u_1(x) \sin \pi y, \quad l = -\frac{4,10^{-3}}{\pi};$$

$$w_2 = l[1,539 u_1 \sin \pi y + 0,062 u_2 \sin \pi y];$$

$$\begin{aligned} w_3 &= l[1,542 u_1 \sin \pi y + 0,063 u_2 \sin \pi y + 0,028 u_1 \sin 3\pi y \\ &\quad + 0,035 u_3 \sin \pi y + 0,003 u_2 \sin 3\pi y + 0,004 u_3 \sin 3\pi y]. \end{aligned}$$

Voici les valeurs de $\frac{w_3}{l}$ calculées pour divers points de la plaque :

$y = 0,5$	0,00	0,37	1,1	1,77	2,17	2,13	1,70	0,81	0,00
$y = 0,375$	0,00	0,35	1,05	1,67	2,03	1,93	1,59	0,76	0,00
$y = 0,25$	0,00	0,28	0,82	1,31	1,66	1,52	1,24	0,58	0,00
$y = 0,125$	0,00	0,15	0,46	0,72	0,92	0,87	0,69	0,33	0,00
$x =$	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000

30. PLAQUE APPUYÉE SUR DEUX BORDS OPPOSÉS ET ENCASTRÉS LE LONG DES DEUX AUTRES. — Prenons pour axe des x un des bords appuyés et pour axe des y un des bords encastrés

$$w_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} u_m(x) \sin n\pi y \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots).$$

L'expression de $u_m(x)$ est celle du paragraphe 6. Les valeurs numériques que nous utilisons ont été données au paragraphe 21.

Il vient pour les deux premières approximations

$$w_1 = l \cdot 0,9881 u_1(x) \sin \pi y, \quad l = -\frac{4}{\pi} 10^{-3},$$

$$w_2 = l(0,996 u_1 \sin \pi y + 0,027 u_1 \sin 3\pi y + 0,033 u_3 \sin \pi y + 0,004 u_3 \sin 3\pi y).$$

Au centre de la plaque,

$$\sin \pi y = 1, \quad \sin 3\pi y = -1, \quad u_1 = -1,588, \quad u_3 = +1,41$$

et

$$w = \frac{4}{\pi} 10^{-3} \times 1,497.$$

31. Comparons les valeurs des flèches obtenues ci-dessus avec celles trouvées par M. Estanave.

Dans l'équation $\Delta_2 \Delta_2 w = f(x, y) = 1$, le second membre représente, à un *facteur constant près*, la pression par unité d'aire. Pour tenir compte de ce facteur, il faut multiplier tous les déplacements trouvés plus haut par $\frac{15}{16EI}$, où $I = \frac{8h^2}{12}$ est le moment d'inertie d'une ligne matérielle normale au feuillet moyen de la plaque par rapport à son centre de gravité.

Il vient alors les valeurs suivantes :

Quatre côtés appuyés :

$$f = 0,975 \frac{4}{\pi^5} \frac{15}{16 EI} = 0,310 \frac{15}{4 EI \pi^5};$$

Trois bords appuyés, un encastré :

$$f = 2,17 \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\pi} \frac{15}{16 EI} = 0,212 \frac{15}{4 EI \pi^5};$$

Deux bords opposés appuyés, deux bords encastrés :

$$f = 1,50 \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\pi} \frac{15}{16 EI} = 0,146 \frac{15}{4 EI \pi^5}.$$

Les valeurs obtenues par M. Estanave sont respectivement

$$0,310 \frac{15}{4 EI \pi^5}, \quad 0,212 \frac{15}{4 EI \pi^5}, \quad 0,134 \frac{15}{4 EI \pi^5}.$$

Il est facile de voir que le dernier chiffre est inexact. M. Estanave trouve pour ω , au centre de la plaque l'expression (Thèse, p. 47)

$$\omega_1 = \frac{15 p}{4 EI \pi^5} \left(1 + \frac{\operatorname{ch} \pi - 1}{\pi + \operatorname{sh} \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \right),$$

et le calcul donne

$$\omega_1 = 0,150 \frac{15}{4 EI \pi^5} \quad \text{au lieu de} \quad 0,134 \frac{15}{4 EI \pi^5}.$$

Le second terme de la série de M. Estanave est

$$\omega_3 = -0,003 \frac{15}{4 EI \pi^5};$$

au total,

$$\omega = \frac{15}{4 EI \pi^5} 0,147 \quad \text{au lieu de} \quad \frac{15}{4 EI \pi^5} 0,134.$$

La concordance des résultats dans les méthodes de Maurice Levy et de Ritz est complète. Dans le cas de la plaque concentrée, on trouve pour flèche $0,098 \frac{15}{4 EI \pi^5}$.

32. Indiquons encore deux applications de la méthode de Ritz à des problèmes d'équilibre élastique d'une plaque carrée, chargée uniformément, mais dans des cas où l'un des côtés, au moins, est libre. Il est évident que la méthode que nous utilisons permettrait de traiter d'une façon analogue, en se servant des formules établies au Chapitre I, tous les autres problèmes d'équilibre de la plaque carrée. Partant toujours de l'énergie potentielle de déformation de la plaque, on voit que l'intégrale $\mathfrak{J}$ dont il faut annuler la variation première est maintenant

$$\mathfrak{J} = \int_p \left\{ \frac{1}{2} (\Delta_2 \omega)^2 - (1 - \mu) \left[\frac{d^2 \omega}{dx^2} \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right)^2 \right] - \omega \right\} dx dy.$$

En effet, on a

$$\delta \mathfrak{J} = \int_p \left\{ \Delta_2 \omega \delta \Delta_2 \omega - (1 - \mu) \delta \left[\frac{d^2 \omega}{dx^2} \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \left(\frac{d^2 \omega}{dx dy} \right)^2 \right] - \delta \omega \right\} dx dy,$$

expression qui, moyennant l'application de la formule de Mathieu et des intégrations par parties, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{J} = & \int_p (\Delta_2 \Delta_2 \omega - 1) dx dy \\ & \times \int_c \left\{ \frac{d \Delta_2 \omega}{dn} + (1 - \mu) \frac{d}{ds} \left[\cos(n, x) \sin(n, x) \left(\frac{d^2 \omega}{dy^2} - \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + [\cos^2(n, x) - \sin^2(n, x)] \frac{d^2 \omega}{dx dy} \right] \right\} \delta \omega ds \\ & + \int_c \left\{ \mu \Delta_2 \omega + (1 - \mu) \left[\cos^2(n, x) \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \sin^2(n, x) \frac{d^2 \omega}{dy^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \cos(n, x) \sin(n, x) \frac{d^2 \omega}{dx dy} \right] \right\} \frac{d \delta \omega}{dn} ds. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, pour un côté soit encastré, soit appuyé, soit libre, les deux intégrales curvilignes s'évanouissent. Ainsi, toute solution de l'équation $\Delta_2 \Delta_2 \omega = 1$ annule $\delta \mathfrak{J}$ si l'on tient compte des conditions au contour.

Pour les calculs numériques, nous prendrons $\mu = \frac{1}{4}$ et nous

partirons de la forme suivante pour $\mathfrak{z}$:

$$(36) \quad \mathfrak{z} = \int_p \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 - w \right] dx dy.$$

33. PLAQUE DONT TROIS BORDS SONT APPUYÉS ET LE QUATRIÈME LIBRE. —

Nous supposons les deux côtés appuyés opposés parallèles à l'axe des x et le bord libre pris pour axe des y . Nous prenons

$$w_{MN} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} u_m(x) \sin n\pi y$$

$u_m(x)$ étant donné par la relation (14) du paragraphe 8. Cette forme de w_{MN} satisfait aux conditions au contour sur les côtés appuyés, *mais pas à celles sur le côté libre*. Cependant, comme ces dernières conditions résultent de l'annulation des intégrales curvilignes dans l'expression de $\delta \mathfrak{z}$ et comme nous déterminons les A_{mn} de façon à rendre $\mathfrak{z}$ minimum, nos approximations vont tendre vers une limite qui satisfait à toutes les conditions au contour.

Nous donnons à m les valeurs 1, 2, 3, ... et à n des valeurs impaires seulement.

$u_1(x) = \sqrt{3}(x-1)$, $u_2(x)$ est la solution de la forme (14) correspondant à $K = 3,9266$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_1'^2 dx &= 3; & \int_0^1 u_2'^2 dx &= 27,24; & \sigma_{22} &= -11,51; \\ \tau_{12} &= 10,15, & \int_0^1 u_1' u_2' dx &= 3,46; & \int_0^1 u_1 dx &= -0,866; \\ & & \int_0^1 u_2 dx &= +0,3704. \end{aligned}$$

Il vient, pour les deux premières approximations, successivement

$$w_1 = -l,6,11 \cdot u_1 \sin \pi y, \quad l = \frac{4}{\pi} 10^{-3}$$

et

$$w_2 = l(-6,231 u_1 \sin \pi y + 0,666 u_2 \sin \pi y).$$

Calculons le déplacement au centre et celui au milieu du côté libre.

Centre :

$$u_1 = -0,866; \quad u_2 = +1,169; \quad \sin \pi y = 1;$$

$$w = \frac{15}{16EI} \frac{4}{\pi} 10^{-3} \cdot 6,175 = \frac{15}{4EI\pi^5} 0,602.$$

Milieu du côté libre :

$$u_1 = -1,732; \quad u_2 = -2; \quad \sin \pi y = 1;$$

$$w = \frac{15}{16EI} \frac{4}{\pi} 10^{-3} \cdot 9,46 = \frac{15}{4EI\pi^5} 0,921.$$

Pour les mêmes points, M. Estanave trouve respectivement

$$\frac{15}{4EI\pi^5} 0,602 \quad \text{et} \quad \frac{15}{4EI\pi^5} 0,915.$$

La concordance, bien que nous n'ayons calculé qu'une deuxième approximation, est satisfaisante, puisque, au centre, les résultats sont identiques et qu'au milieu du côté libre l'écart est inférieur à 1 pour 100. Nous verrons, dans l'exemple suivant, où nous avons poussé les calculs plus loin, que la concordance est alors complète. Mais, l'application précédente est intéressante en ceci qu'elle montre bien l'importance *pratique* qu'il y a à introduire, outre les solutions u_m de la forme générale (14), les solutions particulières de la forme $u = \text{const.}$, ou $u = x \cdot \text{const.}$ Ritz, dans son Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une plaque carrée à bords libres, a mis en évidence le rôle fondamental de ces solutions particulières en montrant que, sans leur introduction, le système orthogonal formé par les u_m ne serait pas *complet*.

34. PLAQUE AYANT DEUX BORDS OPPOSÉS APPUYÉS, UN BORD LIBRE ET UN BORD ENCASTRÉ. — Prenons les deux bords opposés appuyés parallèles à l'axe des x et le bord encastré pour axe des y :

$$w_{MN} = \sum_1^M \sum_1^N A_{mn} u_m(x) \sin n\pi y,$$

$u_m(x)$ est l'expression (16) du paragraphe 10

$$(m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0,7341; & \beta_2 &= 1,0184; & \beta_3 &= 0,9992. \\ \int_0^1 u_1'^2 dx &= 4,65; & \int_0^1 u_2'^2 dx &= 32,41; & \int_0^1 u_3'^2 dx &= 77,30; \\ \sigma_{11} &= + 0,859; & \sigma_{22} &= - 13,29; & \sigma_{33} &= - 45,9; \\ \sigma_{12} &= - 11,6; & \sigma_{21} &= - 1,86; & \sigma_{13} &= + 27,4; \\ \sigma_{31} &= + 1,56; & \sigma_{23} &= - 8,8; & \sigma_{32} &= - 3,16; \\ \int_0^1 u_2' u_1' dx &= - 7,5; & \int_0^1 u_3' u_1' dx &= + 4,0; & \int_0^1 u_3' u_2' dx &= - 36,4, \\ \int_0^1 u_m dx &= - \frac{2\beta_m}{K_m}, & \int_0^1 u_1 dx &= - 0,7841, \\ \int_0^1 u_2 dx &= - 0,4339, & \int_0^1 u_3 dx &= - 0,2544. \end{aligned}$$

Voici les résultats des trois premières approximations :

$$\begin{aligned} w_1 &= l.4,497 u_1(x) \sin \pi y, \quad l = - \frac{4}{\pi} 10^{-3}; \\ w_2 &= l[- 4,817 u_1 \sin \pi y + 0,717 u_2 \sin \pi y]; \\ w_3 &= l[- 4,895 u_1 \sin \pi y + 0,796 u_2 \sin \pi y + 0,031 u_1 \sin 3\pi y \\ &\quad + 0,168 u_3 \sin \pi y + 0,011 u_2 \sin 3\pi y + 0,004 u_3 \sin 3\pi y]. \end{aligned}$$

Si nous calculons, au moyen de cette dernière expression, la valeur numérique de $-\frac{w}{l}$ en divers points de la plaque, il vient :

$y = 0,500$	0,58	1,84	3,22	4,42	5,92	8,39	12,29	8,48
$y = 0,375$	0,53	1,71	2,99	4,10	5,49	7,78	11,45	7,83
$y = 0,250$	0,39	1,31	2,13	3,18	4,25	5,73	8,83	6,10
$y = 0,125$	0,23	0,73	1,27	1,84	2,32	3,13	4,83	3,31
$x =$	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,00

Nous trouvons ainsi :

Centre :

$$w = \frac{15}{16EI} \frac{4}{\pi} 10^{-3} . 4,42 = \frac{15}{16EI\pi^5} 0,4305;$$

Milieu du côté libre :

$$w = \frac{15}{16EI} \frac{4}{\pi} 10^3 \cdot 8,48 = \frac{15}{16EI\pi^5} 0,826.$$

M. Estanave donne pour ces déplacements

$$\frac{15}{16EI\pi^5} 0,430 \quad \text{et} \quad \frac{15}{16EI\pi^5} 0,825.$$

Vu et approuvé :

Paris, le 30 avril 1914.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 30 avril 1914.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Les développements de Cauchy en séries d'exponentielles.

Vu et approuvé :

Paris, le 30 avril 1914.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 30 avril 1914.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

	Pages.
INTRODUCTION	I
I. Position du problème	I
II. Solution de Navier	2
III. Solution de Maurice Levy	2
IV. Méthode de Ritz	3

CHAPITRE I. — *Formules préliminaires tirées de la théorie des tiges élastiques.*

1. Équations du déplacement transversal	4
2. Les fonctions u_m sont orthogonales	5
3. Expressions de diverses intégrales définies	6
4. Forme de l'intégrale générale	7
5. Tige libre	7
6. Tige encastrée	10
7. Tige appuyée	11
8. Tige libre-appuyée	11
9. Tige encastrée-appuyée	12
10. Tige encastrée-libre	13
11. Expression approchée des u_m	13

CHAPITRE II. — *Solution de Ritz pour la plaque encastrée.*

12. Expression de l'intégrale δ	16
13. La solution cherchée rend δ extrémum	16
14. L'intégrale δ possède une borne inférieure	16
15. Unicité de la solution	18
16. Choix des fonctions d'interpolation	18
17. Condition du minimum de δ	20
18. Le minimum de δ_m décroît quand m augmente	21
19. Convergence des approximations successives w_m	22
20. La limite des w_m est la solution cherchée	24
21. Calcul numérique	27

	Pages.
22. Valeurs de w en divers points de la plaque.....	29
23. Non-vérification de l'équation fondamentale par la solution de Ritz.....	30
24. Méthode des moindres carrés.....	33
25. Troisième méthode.....	38
26. Solution par un polynome.....	39

CHAPITRE III. — *Application de la méthode de Ritz à divers problèmes
d'équilibre de la plaque carrée.*

27. Expression de l'intégrale Δ	40
28. Plaque appuyée sur ses quatre bords.....	41
29. Plaque dont trois bords sont appuyés et le quatrième encastré.....	42
30. Plaque appuyée sur deux bords opposés et encastrée le long des deux autres..	43
31. Comparaison des résultats avec ceux de M. Estanave.....	43
32. Expression de δ quand un des côtés de la plaque est libre.....	45
33. Plaque dont trois bords sont appuyés et le quatrième libre.....	46
34. Plaque ayant deux bords opposés appuyés, un bord libre et un bord encastré.	47

SECONDE THÈSE.

Propositions données par la Faculté.....	51
Table des matières.....	53

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS et C^{ie},
54654 Quai des Grands-Augustins, 55
